Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Abr – Jul 2016

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (5 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{\operatorname{sen}(\pi x)} \underset{x=1+t}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{-t(2+t)}{\operatorname{sen}(\pi+\pi t)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-t(2+t)}{\underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0}\cos(\pi t)+\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\operatorname{sen}(\pi t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t(2+t)}{\operatorname{sen}(\pi t)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\pi t}{\operatorname{sen}(\pi t)}}_{\to 1}\underbrace{\frac{2+t}{\pi}}_{\to\frac{2}{\pi}} = \left(\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{\operatorname{sen}(\pi t)}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{2+t}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Pregunta 2. (5 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{|x|-\sqrt{3+2x}}{x-3}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{|x|-\sqrt{3+2x}}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{3+2x}}{x-3}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{3+2x}\right)\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{3+2x}\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{3+2x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3-2x}{(x-3)\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{3+2x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{3+2x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x+1}{\sqrt{x^2}+\sqrt{3+2x}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Pregunta 3. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\sqrt[3]{x^3+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\sqrt[3]{x^3+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\sqrt[3]{x^3+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}\right)^2}=\frac{1}{3}$$

Pregunta 4. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}(3x-2)}{\frac{1}{-|x|}\sqrt{2x^2+1}}\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Pregunta 5. (3 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to0^+}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\underset{t=\frac{1}{x}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{t\to\infty}\arctan(t)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\underset{s=\frac{1}{x}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{t\to-\infty}\arctan(t)=-\frac{\pi}{2}$$

Como los límites laterales no coinciden, el límite no existe.

Pregunta 6. (6 ptos.) Demustre, haciendo uso de la definición de límite, que $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+x-2\right)=-2$

Solución: Como $\mathrm{Dom}\big(x^2+x-2\big)=\mathbb{R}$ entonces $\delta_{\text{máx}}\in(0,\infty)$. Dado $\epsilon>0$ queremos hallar $\delta=\delta(\epsilon)>0$ tal que

$$|x+1|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |x^2+x-2|<\epsilon.$$

$$\begin{aligned}
|x+1|<\delta\le\delta_{\text{máx}} \;&\Rightarrow\; -\delta_{\text{máx}}<x+1<\delta_{\text{máx}}\\
&\Rightarrow\; -1-\delta_{\text{máx}}<x<-1+\delta_{\text{máx}}<1+\delta_{\text{máx}}\\
&\Rightarrow\; |x|<1+\delta_{\text{máx}}
\end{aligned}$$

$$|x^2+x-2+2|=|x^2+x|=|x(x+1)|=|x|\,|x+1|<\big(1+\delta_{\text{máx}}\big)\delta$$

$$\big(1+\delta_{\text{máx}}\big)\delta\le\epsilon\Rightarrow\delta\le\frac{\epsilon}{1+\delta_{\text{máx}}}\Rightarrow\delta=\text{mín}\left(\delta_{\text{máx}},\frac{\epsilon}{1+\delta_{\text{máx}}}\right)$$

para cualquier valor de $\delta_{\text{máx}}\in(0,\infty)$.

Pregunta 7. (6 ptos.) Determine los valores de a y b de modo que la función

$$f(x)=\begin{cases}-2\,\text{sen}(x) & ,\text{ si } x<-\frac{\pi}{2}\\ a\,\text{sen}(x)+b & ,\text{ si } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \cos(x) & ,\text{ si } x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución: La función f es continua en $\big(-\infty,-\frac{\pi}{2}\big)$ por ser producto de una función constante y una función trigonométrica sin saltos en el dominio. El mismo argumento vale en $\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)$ y en $\big(\frac{\pi}{2},\infty\big)$.

Para que sea continua en $x=-\frac{\pi}{2}$ es necesario que

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)=-a+b$$

de donde

$$2=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}\big(-2\,\text{sen}(x)\big)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\big(a\,\text{sen}(x)+b\big)=-a+b.$$

Para que sea continua en $x=\frac{\pi}{2}$ es necesario que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=a+b$$

de donde

$$a+b=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\big(a\,\text{sen}(x)+b\big)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\cos(x)=0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $-a+b=2$ y $a+b=0$ obtenemos los valores $a=-1$ y $b=1$ para que la función f sea continua en todas partes.